

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ РЕЗИНОМЕТАЛЛИЧЕСКОГО БЛОКА ПРИ СЖАТИИ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКОЙ

Розглянуто напружено-деформований стан гумово-металевого віброізолятора при статичному навантаженні.

STRESS-STRAIN STATE OF RUBBER-METAL BLOCK AT COMPRESSION BY STATIC LOAD

Stress-strain state of rubber-metal vibroinsulator at static loading is considered.

Анализ напряженно-деформированного состояния резино-металлического блока проводился в предположении, что при его сжатии вертикальной нагрузкой горизонтальные сечения блока остаются горизонтальными; металлические составляющие блока – жесткие, недеформируемые; точки, находящиеся на вертикальной линии при нагружении остаются на параболе, а резина считается несжимаемой.

С учетом этих предположений, для перемещений U , V , W соответственно вдоль координатных осей x , y , z , которые являются осями симметрии блока (рис. 1), ранее [1] установлены выражения

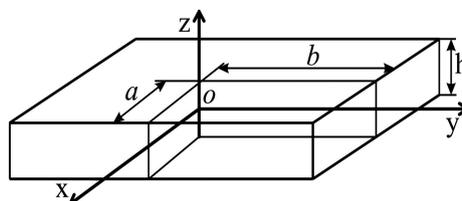


Рис. 1 – Схема блока с характерными размерами

$$U_{(x,y,z)} = C_U \varepsilon_x (1 - 4z^2/h^2); \quad V_{(x,y,z)} = C_V \varepsilon_y (1 - 4z^2/h^2); \quad W_{(x,y,z)} = -\frac{3}{2} \varepsilon \left(z - \frac{4z^3}{3h^2} \right), \quad (1)$$

где C_U , C_V – коэффициенты, зависящие от размеров блока, причем $C_U + C_V = 3/2$; ε – относительное удлинение при сжатии блока ($\varepsilon = \Delta h/h$).

Выражения (1) удовлетворяют условию несжимаемости [2]:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0,$$

где

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z},$$

и дают возможность установить касательные напряжения

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) = -8GC_U \frac{\varepsilon}{h^2} xz; & \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0; \\ \tau_{yz} &= G \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) = -8GC_V \frac{\varepsilon}{h^2} yz, \end{aligned} \quad (2)$$

где G – модуль сдвига.

С учетом этих формул из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = 0,$$

установлены выражения для нормальных напряжений

$$\sigma_x = 4C_U \varepsilon G \frac{x^2}{h^2} + 4C_V \varepsilon G \frac{y^2}{h^2} - (8C_U + 6) \varepsilon G \frac{z^2}{h^2} + C_1; \quad (3)$$

$$\sigma_y = 4C_V \varepsilon G \frac{y^2}{h^2} + 4C_U \varepsilon G \frac{x^2}{z^2} - (8C_V + 6) \varepsilon G \frac{z^2}{h^2} + C_2; \quad (4)$$

$$\sigma_z = 6G\varepsilon \frac{z^2}{h^2} + 4C_U G\varepsilon \frac{x^2}{h^2} + 4C_V \varepsilon G \frac{y^2}{h^2} - \frac{9}{2} G\varepsilon + 0,5C_1 + 0,5C_2, \quad (5)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий на краях блока.

Решения уравнений равновесия в форме (3)-(5) построены с учетом закона Гука [2]

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad (6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; \quad (7)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad (8)$$

где E – модуль упругости I рода;

μ – коэффициент Пуассона.

Для определения коэффициента C_U подставим формулы (3)-(5) в выражение (6), где $\varepsilon_x = C_U \varepsilon (1 - 4z^2/h^2)$, а коэффициент Пуассона для несжимаемой резины $\mu = 0,5$

$$C_U \varepsilon (1 - 4z^2/h^2) = 1/E [4C_U \varepsilon G x^2/h^2 + 4C_V \varepsilon G y^2/h^2 - (8C_U + 6) \varepsilon G z^2/h^2 + C_1 - 0,5(4C_V \varepsilon G y^2/h^2 + 4C_U \varepsilon G x^2/z^2 - (8C_V + 6) \varepsilon G z^2/h^2 + C_2 + 4C_V G \varepsilon y^2/h^2 + 6 \varepsilon G z^2/h^2 + 4C_U \varepsilon G x^2/h^2 - 9/2 G \varepsilon + 0,5C_1 + 0,5C_2)].$$

Учитывая, что $E = 3G$ получим

$$\begin{aligned} 3G\varepsilon C_U - 12G\varepsilon z^2/h^2 &= -(8C_U + 6)G\varepsilon z^2/h^2 + C_1 + (4C_V + 3)G\varepsilon z^2/h^2 - 0,5C_2 - 3G\varepsilon z^2/h^2 + \\ + 9/4G\varepsilon - 0,25C_1 - 0,25C_2 &= -12C_U \varepsilon G z^2/h^2 + (4C_U + 4C_V - 3)G\varepsilon z^2/2 - 3G\varepsilon z^2/2 + \\ + 9/4G\varepsilon + 0,75C_1 - 0,75C_2 &= -12C_U \varepsilon G z^2/h^2 + (4C_U + 4C_V - 6)\varepsilon z^2/2 + 9/4G\varepsilon + \\ + 0,75C_1 - 0,75C_2. \end{aligned}$$

Окончательно

$$3G\varepsilon C_U = 9/4G\varepsilon + 0,75(C_1 - C_2),$$

т.е.
$$C_U = \frac{3}{4} + \frac{C_1 - C_2}{4G\varepsilon}. \quad (9)$$

Аналогичным образом, подставляя формулы (3)-(5) в выражение (7) можно получить

$$C_V = \frac{3}{4} - \frac{C_1 - C_2}{4G\varepsilon}. \quad (10)$$

Из граничных условий на краях блока при $x = \pm a$ и $y = \pm b$ нетрудно получить

$$C_1 = -G\varepsilon \left[\frac{a^2}{h^2}(3+C) + \frac{b^2}{h^2} \left(1 - \frac{C}{3}\right) - \left(1 + \frac{C}{6}\right) \right]; \quad (11)$$

$$C_2 = -G\varepsilon \left[\frac{a^2}{h^2} \left(1 + \frac{C}{3}\right) + \frac{b^2}{h^2}(3-C) - \left(1 - \frac{C}{6}\right) \right], \quad (12)$$

где

$$C = -\frac{3(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2 + h^2}. \quad (13)$$

Для определения относительной деформации ε при заданной вертикальной нагрузке на блок Q имеем

$$-Q = \int_{-a-b}^a \int_{-a-b}^b \sigma_z(h/2) dx dy. \quad (14)$$

При подстановке в последнее уравнение выражения для σ_z (5), определяется относительная деформация

$$\varepsilon = \frac{Q}{Gab \left[-12 + \frac{16}{3} C_U \frac{a^2}{h^2} + \frac{16}{3} C_V \frac{b^2}{h^2} + 2(C_1 + C_2) \right]}. \quad (15)$$

Таким образом, в выражениях (1)-(5), определяющих напряженно-деформированное состояние резинометаллического блока все коэффициенты установлены, что позволяет проводить анализ состояния блока при нагружении или же проектировать блок с наперед заданными характеристиками.

В качестве примера рассмотрено определение значения сжатия блока БРМ 102 при следующих характеристиках. Размеры блока $50 \times 100 \times 200$; резина Р169П, (модуль сдвига $G = 115 \text{ Н/см}^2$); нагрузка $Q = 20000 \text{ Н}$. Экспериментально установленное значение сжатия блока $\Delta = 6,3 \text{ мм}$.

Расчетное значение Δ для такого же блока без металлических составляющих, при гладких поверхностях

$$\Delta = \frac{Qh}{EA} = \frac{20000 \cdot 5}{3 \cdot 115 \cdot 200 \cdot 100} = 1,45 \text{ см.}$$

Расчет для блока при недеформируемых горизонтальных поверхностях выполняется по следующей схеме.

1. Вычисляется коэффициент C по формуле (13)

$$C = -\frac{3(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2 + h^2} = -\frac{3(10^2 - 5^2)}{10^2 + 5^2 + 5^2} = -1,5.$$

2. Вычисляются постоянные интегрирования C_1 и C_2 по формулам (11) и (12):

$$C_1 = -G\varepsilon \left[\frac{a^2}{h^2}(3+C) + \frac{b^2}{h^2} \left(1 - \frac{C}{3}\right) - \left(1 + \frac{C}{6}\right) \right] = -G\varepsilon \left[\frac{20^2}{5^2}(3-1,5) + \frac{5^2}{5^2} \left(1 + \frac{1,5}{3}\right) - \left(1 - \frac{1,5}{6}\right) \right] = -6,75G\varepsilon;$$

$$C_2 = -G\varepsilon \left[\frac{a^2}{h^2} \left(1 + \frac{C}{3}\right) + \frac{b^2}{h^2}(3-C) - \left(1 - \frac{C}{6}\right) \right] = -G\varepsilon \left[\frac{10^2}{5^2} \left(1 - \frac{1,5}{3}\right) + \frac{5^2}{5^2}(3+1,5) - \left(1 + \frac{1,5}{6}\right) \right] = -5,75G\varepsilon.$$

3. Вычисляются коэффициенты C_V и C_U по формулам (9) и (10)

$$C_U = \frac{3}{4} + \frac{C_1 - C_2}{4G\varepsilon} = \frac{3}{4} + \frac{(-6,75 + 5,75)G\varepsilon}{4G\varepsilon} = 0,5;$$

$$C_V = \frac{3}{4} - \frac{C_1 - C_2}{4G\varepsilon} = \frac{3}{4} - \frac{(-6,75 + 5,75)G\varepsilon}{4G\varepsilon} = 1,0.$$

4. Определяется относительная деформация по формуле (15)

$$\varepsilon = \frac{Q}{Gab \left[-12 + \frac{16}{3}C_U \frac{a^2}{h^2} + \frac{16}{3}C_V \frac{b^2}{h^2} + 2(C_1 - C_2) \right]} =$$

$$= \frac{20000}{115 \cdot 10 \cdot 5 \left[-12 + \frac{16}{3}0,5 \frac{10^2}{5^2} + \frac{16}{3}1,0 \frac{5^2}{5^2} + 2(-6,75 - 5,75) \right]} = 0,1318.$$

Тогда расчетная деформация блока составит

$$\Delta r_c = \varepsilon h = 0,1318 \cdot 5 = 0,659 \text{ (см)}.$$

Некоторое различие расчетного и экспериментального значения объясняется тем, что площадь горизонтального сечения реального блока (рис. 2) на краях, где резина связана с металлом несколько больше номинальной, в связи с этим значения характерных размеров сечения резины a и b крайних горизонтальных сечениях и следует принимать в расчет.

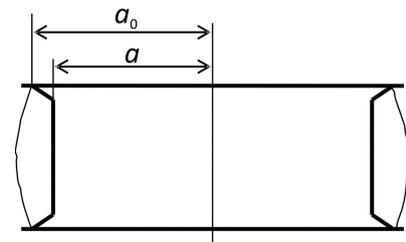


Рис. 2 – Схема деформирования блока при сжатии

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Напряженно-деформированное состояние резино-металлического блока при сжатии статической нагрузкой / Кобец А.С., Науменко Н.Н., Дырда В.И. // Геотехническая механика: Межвед. сб. научн. тр. ИГТМ НАНУ. – Днепропетровск – 2008. – Вып. 75. – С. 68-74.
2. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. – М.: Физматгиз, 1959. – 364 с.